$= 0,8 \times p_n + 0,6 \times (1 - p_n)$

$= 0,8 \times p_n + 0,6 - 0,6 \times p_n$

$= 0,2\, p_n + 0,6$

$= \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}$

D'où $\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$

5°) pour $n = 1$; $\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{20} = 0,1 = p_1$

(Récurrence)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

et montrons que $p_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$.

$p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{3}{5}$

$= \frac{3}{20} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{3}{5}$